



## Esercizio n. 2 (7 punti)

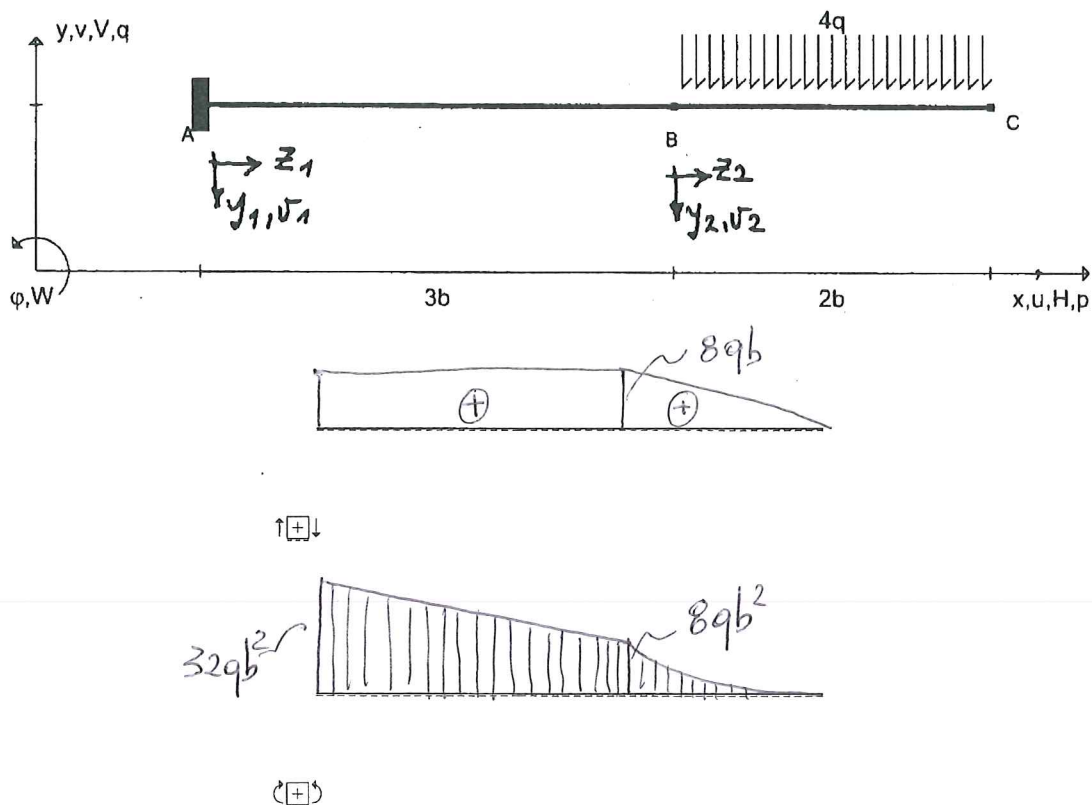
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto *C*,  $v_C$ ;
4. La rotazione del punto *B*,  $\theta_B$ .

Università di Cagliari

SdC\_SdA 09.01.18\*001



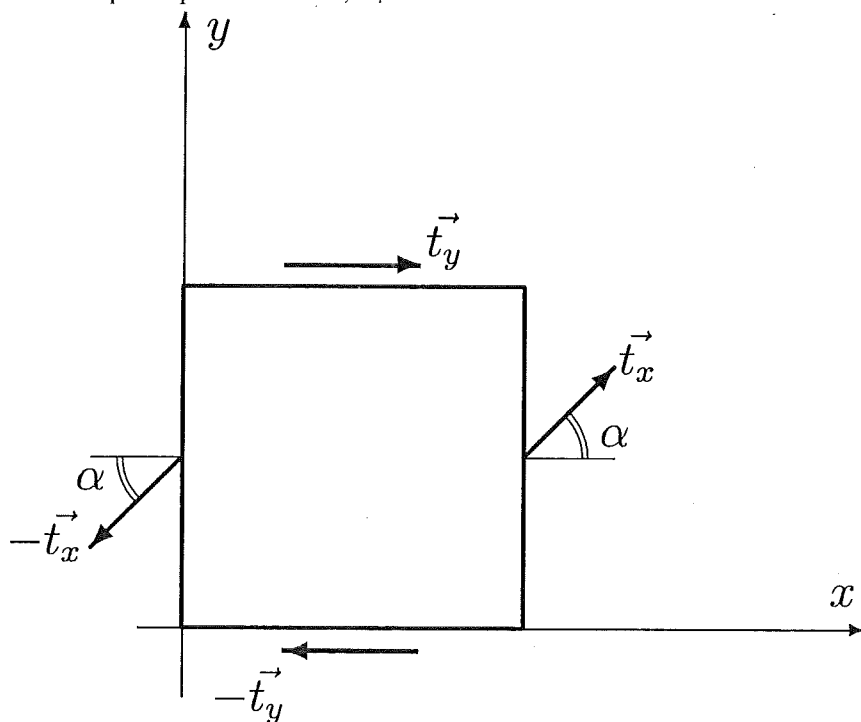
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 8qb; & M_A (\curvearrowright) &= 32qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 8qb; & M_{AB} &= -32qb^2 + 8qbz_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 8qb - 4qz_2; & M_{BC} &= -8qb^2 + 8qbz_2 - 2qz_2^2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0) = 0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= \begin{cases} v_1(z_1=3b) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=3b) = v_2'(z_2=0) \end{cases}; \\
 \text{c.c in C} &= //; \\
 v_1(z_1) &= \frac{16qb^2z_1^2}{EJ} - \frac{4}{3} \frac{qbz_1^3}{EJ}; & v_1'(z_1) &= \frac{32qb^2z_1}{EJ} - 4 \frac{qbz_1^2}{EJ}; \\
 v_2(z_2) &= \frac{108}{EJ} \frac{qb^4}{3} + \frac{60}{EJ} \frac{qb^3z_2}{3} + \frac{4}{EJ} \frac{qb^2z_2^2}{3} - \frac{4}{EJ} \frac{qbz_2^3}{3} + \frac{1}{6EJ} \frac{qz_2^4}{3}; & v_2'(z_2) &= \frac{60}{EJ} \frac{qb^3}{3} + 8 \frac{qb^2z_2}{EJ} - 4 \frac{qbz_2^2}{EJ} + \frac{2}{3} \frac{qz_2^3}{EJ}; \\
 v_C &= \frac{236}{EJ} \frac{qb^4}{3} (\downarrow); & \theta_B &= \frac{60}{EJ} \frac{qb^3}{3} (\searrow);
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 45^\circ$  e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 75\sqrt{2}$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{max}$ .

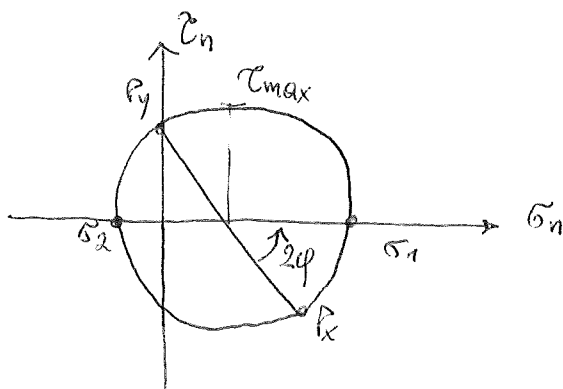
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 75.0000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 75.0000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 121.3525 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -46.3525 \text{ (MPa)}; \tau_{max} = 83.8525 \text{ (MPa)};$$

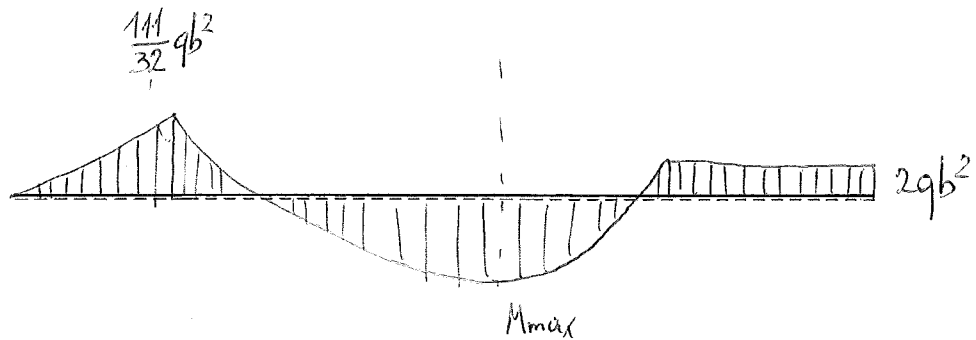
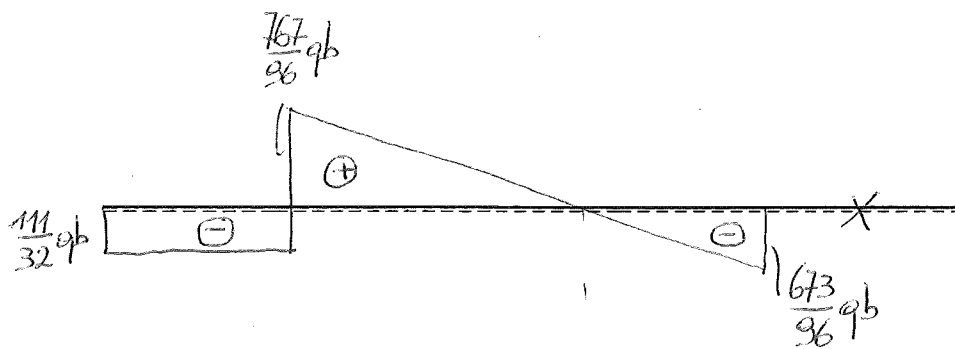
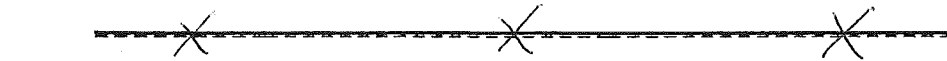
cerchio di Mohr:



$$P_x = (75.0000, -75.0000)$$

$$P_y = (0.0000, +75.0000)$$

$$\varphi = 31.7175 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; \quad V_A (\uparrow) = -\frac{111}{32} qb; \quad V_B (\uparrow) = \frac{275}{24} qb; \quad V_C (\uparrow) = \frac{673}{96} qb; \quad M_B (\square \square \square) = -\frac{111}{32} qb^2, \\
 N_{AB} &= 0; \quad T_{AB} = -\frac{111}{32} qb; \quad M_{AB} = -\frac{111}{32} qbx_1; \\
 N_{CB} &= 0; \quad T_{CB} = \left. \begin{aligned} &-\frac{673}{96} qb + 5qx_2 \\ &\frac{767}{96} qb - 5qx_4 \end{aligned} \right\}; \quad M_{CB} = \left. \begin{aligned} &-2qb^2 + \frac{673}{96} qbx_2 - \frac{5}{2} qx_2^2 \\ &-\frac{111}{32} qb^2 + \frac{767}{96} qbx_4 - \frac{5}{2} qx_4^2 \end{aligned} \right\}; \\
 N_{DC} &= 0; \quad T_{DC} = 0; \quad M_{DC} = -2qb^2; \\
 v_D &= +\frac{57}{64} \frac{qb^4}{EI} \quad (1)
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2016-2017

Prova scritta in aula del 09.01.2018

Parte II - Testo 2

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $B$ ,  $M_B$ .

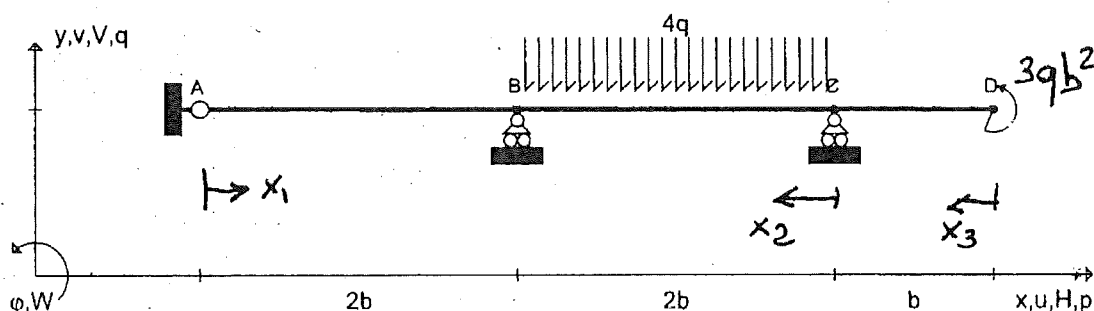
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $D$ ,  $v_D$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 09.01.18\*002



## Esercizio n. 2 (7 punti)

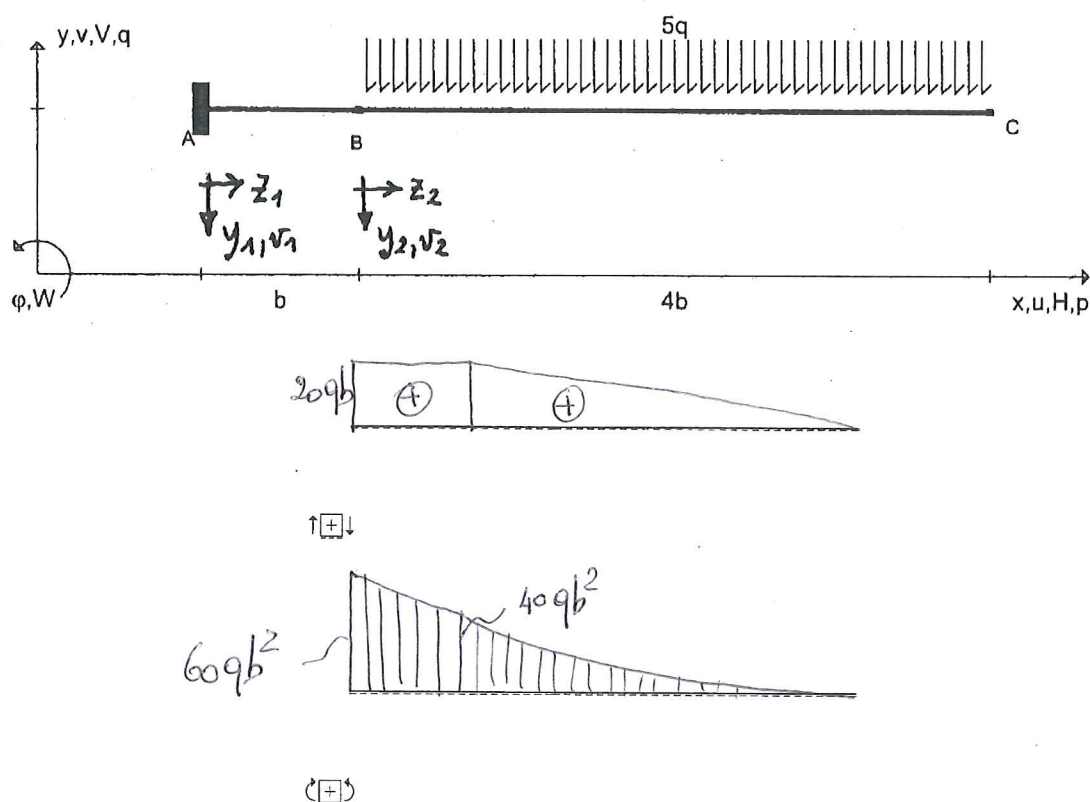
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $C$ ,  $v_C$ ;
4. La rotazione del punto  $B$ ,  $\theta_B$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 09.01.18\*002



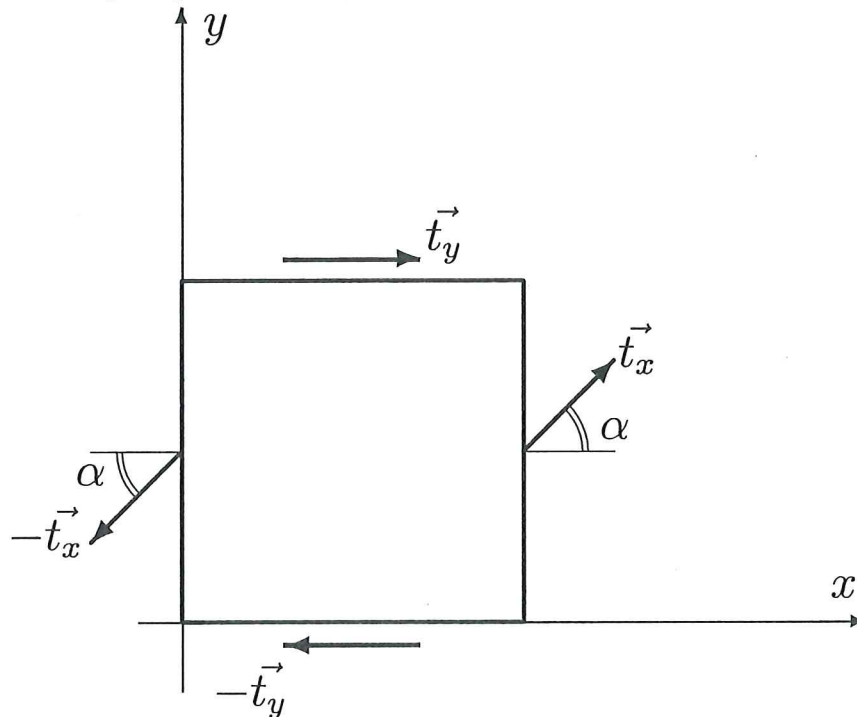
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 20qb; & M_A (\curvearrowright) &= 60qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 20qb; & M_{AB} &= -60qb^2 + 20qbz_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 20qb - 5qz_2; & M_{BC} &= -40qb^2 + 20qbz_2 - \frac{5qz_2^2}{2}; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0) = 0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= \begin{cases} v_1(z_1=b) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=b) = v_2'(z_2=0) \end{cases}; \\
 \text{c.c in C} &= \text{---}; \\
 v_1(z_1) &= \frac{30qb^2z_1^2}{EI} - \frac{10qbz_1^3}{EI}; & v_1'(z_1) &= \frac{60qb^2z_1}{EI} - \frac{10qbz_1^2}{EI}; \\
 v_2(z_2) &= \frac{80qb^4}{3EI} + \frac{50qb^3z_2}{EI} + \frac{20qb^2z_2^2}{EI} - \frac{10qbz_2^3}{3EI} + \frac{qz_2^4}{24EI}; & v_2'(z_2) &= \frac{50qb^3}{EI} + \frac{40qb^2z_2}{EI} - \frac{10qbz_2^2}{EI} + \frac{qz_2^3}{6EI}; \\
 v_C &= \frac{1160qb^4}{3EI} (\downarrow); & \theta_B &= \frac{50qb^3}{EI} (\searrow);
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$ , rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 45^\circ$  e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 95\sqrt{2}$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{max}$ .

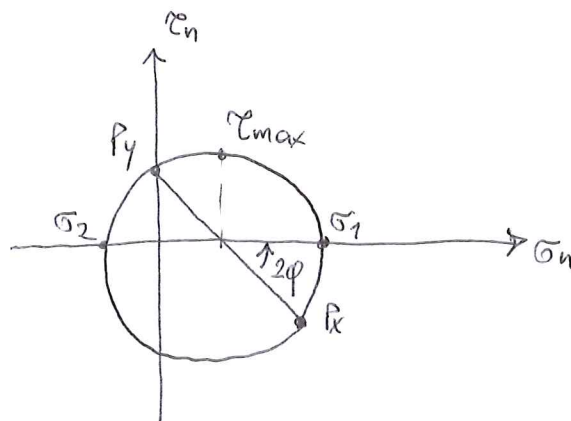
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 95.0000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 95.0000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 153.7132 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -58.7132 \text{ (MPa)}; \tau_{max} = 106.2132 \text{ (MPa)};$$

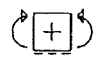
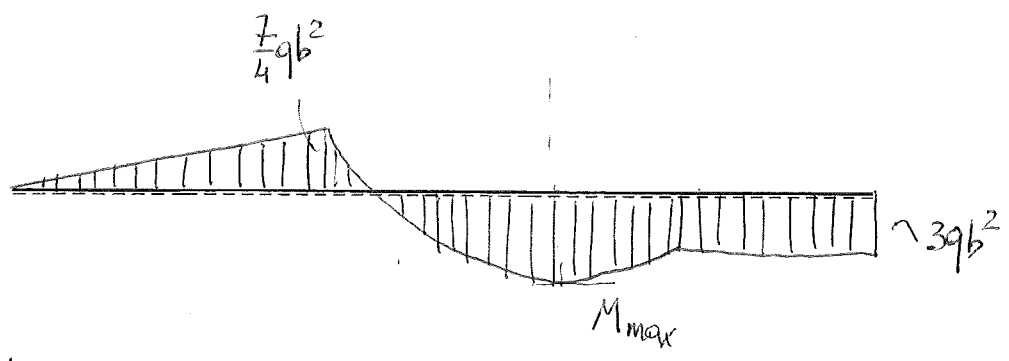
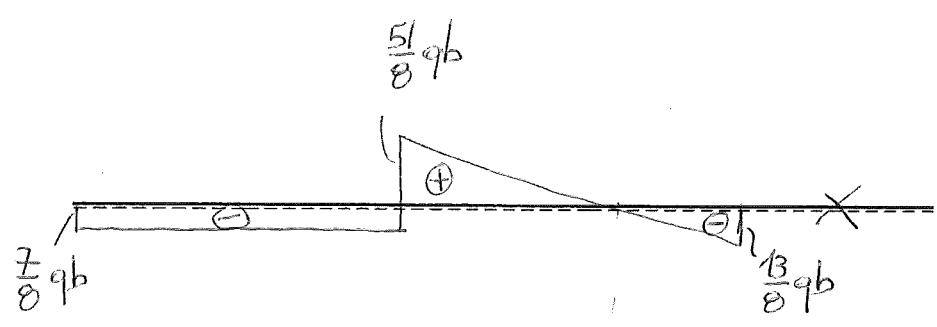
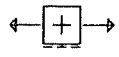
cerchio di Mohr:



$$P_x = (95.0000, -95.0000)$$

$$P_y = (0.0000, +95.0000)$$

$$\varphi = 31.7175 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$H_A (\Rightarrow) = 0$	$V_A (\uparrow) = -\frac{7}{8}qb$	$V_B (\uparrow) = \frac{29}{14}qb$	$V_C (\uparrow) = \frac{13}{8}qb$	$M_B (\curvearrowright) = -\frac{7}{4}qb^2$
$N_{AB} = 0$	$T_{AB} = -\frac{7}{8}qb$	$M_{AB} = -\frac{7}{8}qb x_1$		
$N_{CB} = 0$	$T_{CB} = \begin{cases} -\frac{13}{8}qb + 4qx_2 \\ \frac{51}{8}qb - 4qx_4 \end{cases}$	$M_{CB} = \begin{cases} 3qb^2 + \frac{13}{8}qb x_2 - 2qx_2^2 \\ -\frac{7}{4}qb^2 + \frac{51}{8}qb x_4 - 2qx_4^2 \end{cases}$		
$N_{DC} = 0$	$T_{DC} = 0$	$M_{DC} = 3qb^2$		
$v_D = +\frac{17}{4} \frac{qb^4}{EI} (\uparrow)$				